Sprechen wir über Zahlen

(Karl-Heinz Wolff)

Die Überschrift ist insoweit irreführend, als der Autor ja schreibt und nicht mit dem Leser spricht. Was Mathematik im allgemeinen und Zahlen im besonderen betrifft, geht man wohl nicht fehl in der Annahme, daß über alles, worüber gesprochen werden kann, auch geschrieben werden kann. Mathematische Sätze, mathematische Beweise, müssen sogar schriftlich vorliegen, wenn sie allgemein anerkannt werden sollen.

Will man sich gegenüber einer Person verständlich machen, muß diese Person die gewählte Sprache verstehen. Will man sich schriftlich verständlich machen, muß der Leser nicht nur die Schrift kennen sondern auch die Bedeutung der verwendeten Zeichen, Worte und Wortkombinationen.

Wir gehen zunächst davon aus, daß für die schriftliche Darstellung eine gewisse Anzahl von Zeichen zur Verfügung stehen, wie Buchstaben, Ziffern, Symbole, Rechenzeichen, das Spatium usw. Diese Zeichen können kursiv, fettgedruckt, höher- oder tiefergestellt verwendet werden. Es können lateinische, griechische, gotische usw. Buchstaben zugelassen sein. Es kann sich dabei etwa um alle in einer Druckerei oder in einem Computer zur Verfügung stehenden Zeichen handeln. Allgemein nehmen wir an, es stehen ω verschiedene Zeichen α_i mit $i = 1, 2, \ldots \omega$ zur Verfügung und wir bezeichnen die Zeichenmenge mit $\boldsymbol{\Omega} := \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\omega\}$.

Was kann nun alles geschrieben werden? Wir bezeichnen eine Zeichenfolge, die aus genau L zeilenweise angeordneten Zeichen besteht, mit ^{L}ZF. Offenbar gibt es genau ω^L verschiedene Zeichenfolgen ^{L}ZF der Länge L.

Wir wollen ja über Zahlen sprechen. Betrachten wir also Zeichenfolgen, die Zahlen beschreiben. Solche Zeichenfolgen sind z.B. „1“ oder „17“. Der Computer ermöglicht auch andere Beschreibungen wie z.B. „10^3“. Diese Zahl kann aber auch durch „1000“ beschrieben werden. Einigt man sich etwa auf die Beschreibung „$\mathbf{a}^{\mathbf{b}}$“ ist gleichbedeutend „**a**exp**b**“, dann kann die recht große Zahl 9exp{9exp[9exp(9exp9)]} durch eine Zeichenfolge ^{23}ZF lediglich der Länge L = 23 aus einer verhältnismäßig kleinen Zeichenmenge in einer Zeile beschrieben werden.

Betrachten wir als nächstes Dezimalzahlen: „$\frac{1}{2}$“ kann als Dezimalzahl in der Form „0.5“ beschrieben werden. Die Dezimalzahl-Beschreibung von „$\frac{1}{3}$“ wird problematisch, da hier wegen $\frac{1}{3}$ = 0'333..... unendlich viele Dezimalstellen ungleich Null auftreten. Verwenden wir die übliche Beschreibung $0'\dot{3}$ (sprich: Null Komma Drei periodisch), dann ist $\frac{1}{3}$ wenigstens scheinbar als unendliche Dezimalzahl beschrieben. Wir wissen, daß jede Dezimalstelle gleich 3 ist. Aber das Gleiche gilt, wenn man will, auch für die Zahl 1, die als 1’000..... = $1'\dot{0}$ oder 0’999..... = $0'\dot{9}$ ebenfalls als unendliche Dezimalzahl beschrieben werden kann.

Diese Beispiele sollen in die Problematik unendlicher Dezimalzahlen einführen. Weitere Beispiele sind transzendente Zahlen, wie z.B. e = 2.71828... Aber auch hier gibt es (natürlich) endliche Beschreibungen wie etwa e = $\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Wir wenden uns nun der Anordnung von Zahlen zu. Für natürliche Zahlen bietet sich als erstes eine Anordnung ihrer Größe nach an, also 1, 2, ... n, n+1,..... Diese Art der Anordnung ist bei den rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ (a,b natürliche Zahlen) nicht möglich. Hier hilft man sich etwa durch eine Anordnung zunächst in Zahlengruppen nach der Größe von $a + b$ und innerhalb dieser Gruppen nach der Größe von a. Etwas umständlicher aber unschwer können auch die algebraischen Zahlen abzählbar angeordnet werden.

Wir bemerken, daß alle diese Anordnungen letzten Endes auf der Anordnung jener natürlichen Zahlen beruhen, die zur **Berechnung** der anzuordnenden Zahlen herangezogen werden. Die natürlichen Zahlen sind das Herz jeder abzählbaren Anordnung.

Bei transzendenten Zahlen, wie etwa e, versagen diese Methoden der Anordnung. Man sagt z.B., daß es nicht möglich sei, die reellen Zahlen in einer Folge abzählbar anzuordnen. Einen eleganten Beweis dafür hat Cantor mit Hilfe eines nach ihm benannten Diagonalverfahrens geliefert:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit beschränken wir uns auf die reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Zunächst nehmen wir an, es gäbe eine Folge (r_n) = *RA(0,1)* aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 und zeigen dann, wie Cantor einen Widerspruch zur Behauptung der Vollständigkeit dieser Folge herbeiführt. Dazu schreiben wir die reellen Zahlen aus der Folge in Form unendlicher Dezimalzahlen folgendermaßen an:

$$
\begin{array}{l}
r_1 = 0'\ r_{1,1}\ r_{1,2}\ \ldots\ r_{1,n}\ \ldots\ldots \\
r_2 = 0'\ r_{2,1}\ r_{2,2}\ \ldots\ r_{2,n}\ \ldots\ldots \\
\ .\quad\ . \\
\ .\quad\ . \\
r_n = 0'\ r_{n,1}\ r_{n,2}\ \ldots\ r_{n,n}\ \ldots\ldots \\
\ .
\end{array}
$$

Nun bilden wir eine reelle Zahl c = 0' $c_1 c_2$ ... c_n ..... , für die lediglich $\forall n$: $c_n \neq r_{n,n}$ gefordert wird. Von 10 möglichen Ziffern für jede Dezimalstelle ist bei der Wahl von c nur eine verboten, 9 sind erlaubt. Man sieht sofort, daß ein solches c in der Folge *RA(0,1)* nicht enthalten sein kann, da jede derartige „Cantor'sche Diagonalzahl" sich von jeder Zahl $r_n \in$ *RA(0,1)* in der n^{ten} Dezimalstelle unterscheidet.

Für den Beweis nach Cantor ist es unerheblich, in welcher Weise die Zahlen in der Folge *RA(0,1)* angeordnet wurden. Sein Beweis der Unvollständigkeit gilt ja für **jede** Folge.

Ist das wirklich so ?

Bevor wir auf diese Frage konkret eingehen, betrachten wir noch einmal die sich einer abzählbaren Anordnung so zäh widersetzenden transzendenten Zahlen. Man kann sie ja nicht in Form unendlicher Dezimalzahlen **anschreiben**. Für ihre Beschreibung sind jeweils umfangreichere Ausdrücke notwendig. Es ist zu erwarten, daß, je komplexere Beschreibungen zugelassen werden, desto mehr transzendente Zahlen beschrieben werden können.

Betrachten wir einmal die Cantor'sche Diagonalzahl c selbst. Wie lautet ihre Beschreibung? Um c zu beschreiben muß zuerst eine Folge (r_n) von reellen Zahlen zwischen 0 und 1 vorliegen. Erst auf Grund einer solchen konkreten Folge kann die gesuchte Diagonalzahl etwa durch $c_n = 1$ für $r_{n,n} \neq 1$ und $c_n = 2$ für $r_{n,n} = 1$ beschrieben werden.

c wird also nicht durch eine „Formel" im klassischen mathematischen Sinn beschrieben, wie etwa eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$, sondern „verbal", also durch Worte. Aber auch die rationalen und die algebraischen Zahlen lassen sich letztlich „verbal" beschreiben.

Dies legt es nahe, eine Anordnung von Zahlen auf Grund ihrer **verbalen** Beschreibung zu versuchen. Verbale Beschreibungen können in Form von Zeichenfolgen ZF vorgenommen werden. Wir betrachten also alle Zeichenfolgen ZF, welche eine reelle Zahl r = r(ZF) beschreiben. ${}^{L}ZF$ mit $r = r({}^{L}ZF)$ sei eine solche Zeichenfolge der Länge L. Werden die Ziffern 0 bis 9 in der Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ zugelassen, dann ist ${}^{1}ZF = 1$ eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl 1 beschreibt, ${}^{2}ZF = 17$ eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl 17 beschreibt, usw.

Natürlich gibt es eine Vielzahl von verbalen Beschreibungen einer reellen Zahl. Es kann 1 auch durch die Zeichenfolge „a geteilt durch a", 17 auch durch „siebzehn" oder „vierunddreißig geteilt durch zwei", usw. beschrieben werden.

Zeichenfolgen lassen sich unschwer abzählbar anordnen. Legt man die Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ zugrunde, dann hat eine Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ der Länge L die Gestalt $\alpha_{n_1}\,\alpha_{n_2}\,...\,\alpha_{n_L}$ mit $\alpha_{n_k} \in \boldsymbol{\Omega}$ und k = $n_1, n_2\,...\,n_L$. Zur abzählbaren Anordnung bilden wir für jede solche Zeichenfolge ${}^{L}ZF_n$ eine Hilfszahl $\Pi({}^{L}ZF_n) = 2^{n_1}\cdot 3^{n_2}\cdot ...\cdot\pi_k{}^{n_k}\cdot ...\cdot\pi_L{}^{n_L}$, wobei π_k die k^{te} Primzahl in der Primzahlenfolge $\boldsymbol{\Pi}: = (2, 3, ...\,\pi_i, ...)$ ist. Wäre etwa α_1 der Buchstabe „a" und α_2 der Buchstabe „b", dann entspricht die Hilfszahl $\Pi = 2 = 2^1 = \pi_1{}^1$ der Zeichenfolge „α_1", also dem „a", die Hilfszahl $\Pi = 4 = 2^2 = \pi_1{}^2$ der Zeichenfolge α_2, also dem „b", die Hilfszahl $\Pi = 18 = 2^1 \times 3^2 = \pi_1{}^1 \times \pi_2{}^2$ der Zeichenfolge „$\alpha_1\alpha_2$", also „ab", usw.

Wir können also **alle** endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen $\Pi(ZF)$ in einer Folge $(ZF_n) = ZFA$ abzählbar anordnen. Dazu setzen wir $\min\limits_{(ZF)}\Pi(ZF) = \Pi(ZF_1) = 2$ und im weiteren $\forall n\text{:}\ \Pi(ZF_n) < \Pi(ZF_{n+1})$. Man erhält nun etwa $\Pi(ZF_2) = 4$ mit $ZF_2 = \alpha_2$, $\Pi(ZF_3) = 6$ mit $ZF_3 = \alpha_1\alpha_1$, $\Pi(ZF_4) = 8$ mit $ZF_4 = \alpha_3$ usw.

Im weiteren betrachten wir alle reellen Zahlen r(ZF) mit 0 < r(ZF) < 1, die durch eine Zeichenfolge ZF eindeutig und widerspruchsfrei (!) beschrieben werden. Diese reellen Zahlen ordnen wir nach der Größe der Hilfszahlen Π(ZF) der sie beschreibenden Zeichenfolgen ZF in einer Folge (r_n) = *RA(0,1)* abzählbar an. Da reelle Zahlen durch mehrere Zeichenfolgen eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben werden können, tritt jede solche reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)* mehrfach auf. Wir behaupten:

1) In der Folge *RA(0,1)* sind alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 enthalten.
2) Eine Cantor'sche Diagonalzahl kann nicht widerspruchsfrei eingeführt werden.

Die Anordnung der reellen Zahlen in der Folge *RA(0,1)* hängt natürlich von der zugrunde gelegten Zeichenmenge $\boldsymbol{\Omega}$ ab, sowie vom „Sinn", den der Leser einer Zeichenfolge zubilligt. Wir wollen annehmen, daß darüber ebenso Einvernehmen besteht, wie bei der Interpretation der vorhandenen mathematischen Literatur und es sei r_n die n^{te} reelle Zahl in der Folge *RA(0,1)*. Als Dezimalzahl geschrieben habe sie die Form: $r_n = 0'\, r_{n,1}\, r_{n,2} \ldots r_{n,n} \ldots..$

Wir versuchen nun, die Unvollständigkeit der Folge *RA(0,1)* nach Cantor zu beweisen. Dazu bilden wir eine Diagonalzahl $c = 0'\, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots..$ mit $\forall n\colon c_n \neq r_{n,n}$. Könnte ein solches c gefunden werden, müßte $\forall n\colon c \neq r_n$ gelten. Damit wäre $c \notin$ *RA(0,1)*, die Folge also unvollständig.

Tatsächlich kann aber für die von uns gewählte Folge *RA(0,1)* ein solches c nicht widerspruchsfrei gefunden werden. Zweifellos gibt es eine Zeichenfolge *ZF* mit c = c(*ZF*), die einerseits die Bildung der zugrunde gelegten Folge *RA(0,1)* und andererseits das darauf beruhende Bildungsgesetz von c beschreibt. *ZF* ist also eine Zeichenfolge, welche die reelle Zahl c mit 0 < c < 1 eindeutig beschreibt. Wird c durch *ZF* aber auch **widerspruchsfrei** beschrieben?

Für die Zeichenfolge *ZF* können wir die Hilfszahl Π(*ZF*) bilden, die *ZF* eindeutig kennzeichnet. Für die Folge *RA(0,1)* haben wir alle Zeichenfolgen ausgewählt, die eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschreiben. Wäre dies für c = c(*ZF*) der Fall, dann hätte *ZF* ausgewählt werden müssen und c hätte entsprechend der Größe der Hilfszahl Π(*ZF*) **definitionsgemäß** einen Platz in der Folge *RA(0,1)*. Dort stehe c etwa an der n^{ten} Stelle, d.h. es wäre $c = r_n$. Daraus folgt aber $c_n = r_{n,n}$ im Widerspruch zu $\forall n\colon c_n \neq r_{n,n}$, wie dies für die Cantor'sche Diagonalzahl gefordert wurde.

Dieser Widerspruch beruht darauf, daß alle endlichen Zeichenfolgen ZF nach der Größe ihrer Hilfszahlen Π(ZF) in einer Folge *ZFA* abzählbar angeordnet werden können. Unabhängig davon, welcher „Sinn" einer bestimmten Zeichenfolge zugesprochen wird, ist für jede ein Platz in der Folge *ZFA* reserviert. Damit wird aber die Definition jeder Cantor'schen Diagonalzahl selbst widersprüchlich. Das erforderliche c kann durch keine Zeichenfolge ZF widerspruchsfrei beschrieben werden. Beweise, in denen in sich widersprüchliche Begriffe als widerspruchsfrei verwendet werden, bezeichnet der Autor als mißlungen.
Dies gilt für ihn auch hinsichtlich des obigen Versuches, mit Hilfe einer Cantor'schen Diagonalzahl die Unvollständigkeit der abzählbaren Anordnung aller reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in der Folge *RA(0,1)* zu beweisen.

Ein leises Unbehagen bei der Betrachtung der Folge *RA(0,1)* liegt für den Autor darin begründet, daß sie auf einer Anordnung von Zeichenfolgen beruht, einer Anordnung, die auf den ersten Blick nichts mit Mathematik zu tun hat. In der Mathematik ist man an Anordnungen, wie die der natürlichen Zahlen (die bekanntlich von Gott stammen), gewöhnt. Die weiter oben beschriebene Anordnung der rationalen Zahlen ist man ebenfalls noch gewohnt. Auch die Auswahl der von uns für die Anordnung der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 heranzuziehenden rationalen Zahlen bereitet keine Schwierigkeit. Man wählt dabei in der durch die natürlichen Zahlen a und b gebildeten Gruppe nur jene rationalen Zahlen $\frac{a}{b}$ aus, die zwischen 0 und 1 liegen, also alle a mit $1 \leq a < \frac{b}{2}$.

Etwas umständlicher ist schon die Anordnung der algebraischen reellen Zahlen zwischen 0 und 1. Zwar ist die Anordnung der algebraischen Gleichungen unproblematisch, doch gibt es keine allgemeine Formel für die Wurzeln einer algebraischen Gleichung, deren Grad höher als 4 ist. Um zu einer Anordnung aller reellen algebraischen Zahlen zwischen 0 und 1 zu kommen, muß man daher zunächst alle Wurzeln a + bi mit nicht verschwindendem Imaginärteil b ausscheiden und aus den verbleibenden die mit 0 < a < 1 auswählen. Diese Aufgabe erscheint durchaus der Aufgabe vergleichbar, eine Zeichenfolge ZF daraufhin zu überprüfen, ob durch sie eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 eindeutig und widerspruchsfrei beschrieben wird.

Für den Autor ist der für eine Entscheidung in beiden Fällen notwendige Arbeitsaufwand zweitrangig. Entscheidend ist die Tatsache, daß es sich sowohl bei der Menge der algebraischen Zahlen als auch bei der Menge der zu prüfenden Zeichenfolgen um **abzählbare** Mengen handelt. Es treten also bisher noch keine Mengen auf, deren Mächtigkeit die der natürlichen Zahlen übersteigt, wie etwa das Kontinuum im klassischen Sinn.

Überabzählbare Mengen werden aber auch rein mengentheoretisch eingeführt, etwa durch die Bildung der „Potenzmenge“ einer unendlichen Menge. Wir wollen nicht weiter ins Detail gehen. Hier nur soviel: Auch die Bildung der Potenzmenge M und insbesondere die Auswahl eines ihrer Elemente ist nur mit Hilfe verbaler Beschreibungen möglich, bewegt sich daher wieder nur im Bereich der Zeichenfolgen. Zu jedem verbal beschriebenen Element E aus M gibt es daher Zeichenfolgen ZF mit E = E(ZF), die E eindeutig beschreiben. Alle solchen Elemente E = E(ZF) können nach der Größe der Hilfszahlen Π(ZF) (also entsprechend dem Platz der Zeichenfolge ZF in *ZFA*) in einer Folge abzählbar angeordnet werden. Jede Beschreibung eines Elementes der Potenzmenge M, das in dieser Folge nicht enthalten sei, enthält wiederum einen Widerspruch.

Man kann eben Mathematik (wie alle anderen Wissenschaften) nur mit Worten einer problembezogenen Sprache betreiben (Mit Worten läßt sich trefflich streiten...). Der Versuch, durch eine notwendigerweise verbale Konstruktion überabzählbarer Mengen über den Bereich der abzählbaren Zeichenfolgen bzw. der durch sie beschreibbaren Objekte hinaus zu gelangen, gleicht dem Versuch Münchhausens, sich am eigenen Zopf aus dem Sumpf zu ziehen. Dieser Versuch wird ja dem Reich der Märchen und Sagen zugeordnet. Aber das ist ein anderes Thema.